

發現天賦之旅—以資優數學課程為例

侯雅齡

屏東教育大學特殊教育系副教授

摘要

資優教育應提供資優學生適性的課程，以激發資優生的學習熱情，促進資優生潛能充分發展。數學的學科特性，往往讓數學教育的焦點偏向計算與解題的工具性學習，學生無法真正瞭解數學的功用與價值，更遑論去感受數學之美；因此本文提出科際整合導向數學課程的重要性，資優生的數學課程應該關注數學與其他領域的科際整合，強調高層次思考與學習的統整性，文中介紹「一筆畫」資優數學課程設計，該課程融入數學建模並與生活、文史、藝術相連結，不僅可以滿足資優生的數學學習需求，亦關注數學情意態度的提升，有助於資優生展開發現數學天賦之旅。

關鍵字：科際整合、連結、資優生、數學課程

一、前言

美國前教育部長 Richard Riley 曾說「2010 年最迫切需要的十種工作，在 2004 年時根本不存在」，二十一世紀資訊科技一日千里，知識累積與演化速度更是驚人，瞬息萬變的社會，讓未來充滿了不確定性。如果教育是以專精學科內容、吸收前人的知識系統為主調，那麼面對源源不絕的新知識，老師要消化這麼龐大的知識並再對學生一一講授，定有課程總教不完的喟嘆，或許我們該仔細想想：現今的學校教育是要培養精熟學科知識的優秀學生？抑或是培養有足夠能力回應這個複雜多變社會的人才？如果學生的心力都投注在吸收與消化既有知識，又有多少時間能進行創新與適應未來？蕞爾的台灣，要提升國家競爭力，唯有靠培育高素質的人力，這是大家共同的體認，事實上，自民國 62 年起我國即有資優實驗方案的實施，民國 73 年總統府頒布「特殊教育法」正式將資優教育法治化，具體落實了因材施教的教育理念。

一般認為資賦優異學生具有較快速的學習能力、能理解複雜或抽象議題、良好的口語表達能力以及解決問題的能力 (Feldhusen, 1986; Renzulli, 2005)，尤其在使用高明的策略解決問題上更是突出 (Clark, 2002; Steiner, 2006)，所以在資優課程的設計，應提供機會讓學生能盡展所長，「特殊教育課程教材教法及評量方式實施辦法」(2010年12月)中更明文規範了「資賦優異教育之適性課程，除學生專長領域之加深、加廣，或加速學習外，應加強培養批判思考、創造思考、問題解決、獨立研究及領導等能力」。的確，如果提供給資優生的課程，著眼於在最短的時間傳遞系統性知識與精熟大量的知識，那無疑是一種人才的浪費，因為面對源源不絕的新知識，資優生的腦袋不該成為有組織的圖書館，而應該用來進行知識的創新與理論的建構。

但是，在現實的狀況下，我們常常可以看到教師以各種學科評量卷、艱澀的練習題作為教學材料，學生的學業成績成為資優教學成效的檢核標準，這種情形在數學學科的教學特別明顯，或許是因為數學的結構有順序性的特質，方便數學加速學習，所以多數的資優數學課程採用內容導向的加速方式 (例如：Brody & Benbow, 1987; Davis & Rimm, 1998; Feldhusen, Proctor, & Black, 1986; Southern, Jones, & Fiscus, 1989)；另數學的學科特性，也讓數學教育的焦點偏向計算與解題的工具性學習，學生無法真正瞭解數學的功用與價值，更遑論由數學由簡馭繁的嚴密精神中去感受數學之美。無怪乎我國學生在近二次的國際數學與科學教育成就趨勢調查 (Trends in International Mathematics and Science Study) (張秋男編，2005；Martin, Mullis, & Foy, 2008)，以及國際學生能力評量計畫 (Programme for International Student Assessment, PISA) 的調查結果中，皆發現數學成就高但是數學學習興趣與自信低落的現象，而侯雅齡 (2010) 也發現相較於一般學生，接受資優服務的學生其學業自信與學業成就不相稱的狀況更為明顯，在追求數學成就的同時，我們似乎遺落了對數學素養與情意教育的關注，如何讓所有優秀學生，能對數學有更符合能力的期待，並建立數學正向的價值，使人才可以充分發展潛能是值得努力的目標。

二、資優生數學課程的科際整合

「數學是一門嚴格的科學，所有定理的推導都架構在邏輯推理之上」，它不像物理學、生物學、歷史學等學科，必須仰賴許多權威人士的想法，學生可以自行作實驗、自己進行原理的推導，一旦證明出來就是斬釘截鐵，沒有

模糊的空間，也就是說學生和數學概念之間可以是沒有隔閡的（Stein, 1996/2005）。這樣的學科特質，讓我們在面對資優學生的數學學習時，總希望能協助學生獲得更高階、更深奧的概念，協助他們具備更好的解題技巧。不過，在科技一日千里的現代，人才培育也需要重視如何讓學生有追尋新事物和新創見的動力，資優學生偏好複雜與挑戰性的作業，如果在學習的過程中未給予合宜的課程與教學，可能會限制資優生追尋創見的機會，讓學生的發展有所侷限。事實上，數學教育除了工具性的學習之外，如何具備應用數學與欣賞數學的能力也不容輕忽。有「數學皇帝」美喻的中研院院士丘成桐，最近在受訪時指出「台灣數學教育最大的問題在於『文化修養不夠』，丘成桐認為兩岸華人的數學教育，因為太重視考試以致於偏重記憶、公式與標準形式的解題，不重視『文化修養』、不談創造性，很難做出具開創性的學問」（何定照，聯合報，2012年12月9日），在他出版的「丘成桐談空間的內在形狀」（Yau, & Nadis, 2012/2012）書中，可見這位數學大師除了有豐富的數學素養之外，信手拈來能用許多人文學科解釋科學，在其著作中，人文與數學有了相當好的交融。

在美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）2000年出版的「學校數學課程原則與標準」中，即已強調連結的重要性，包含數學概念相互的連結以及數學外部的連結，希望學生能應用所學的數學知識於相關領域中（NCTM, 2000）；我國九年一貫數學領域的課程綱要（教育部，2003，2008）在數學內容增加「連結」的主題，在課程目標達成上，乃希冀培養學生演算、抽象、推論與溝通的能力，以及欣賞數學的態度與能力。課程綱要中的連結，包含「內部連結」與「外部連結」，內部連結指的是數學學習內容之間的連結，外部連結則是強調數學的生活應用及數學與其他學習領域的關係，前者，重點在於聯絡學生的經驗，發展學生的概念（鍾靜，2010，p122）；後者，關注應用性與延伸性，希望學生藉此能透過覺察、轉換、解題、溝通與評析，來拓展新知。筆者以為，資優教師在設計資優生的數學課程時，應該關注數學與其他領域的科際整合，強調高層次思考與學習的統整性，數學不只是計算、解題，也有其創造性，老師應扮演學生學習的催化者，讓學生以分析性、創意性的方式處理數學知識。如此方得以豐富學生的數學視野、充實數學素養，甚至提升數學情意態度。

一般人都能理解數學是科學運作的基本與有力的工具，所以數學與科學是有相關的，除此之外，數學與語文、地理、歷史乃至於藝術都有相當的連結性，以下乃針對數學與其它學科可能的連結做具體說明：

1. 與科學的連結：觀察、形成假設（推測或命題）以及實驗等方法，是協助學生瞭解數學建模的歷程所必然使用到的方法。而上述方式也是科學探究歷程重要的技巧。
2. 與生活的連結：中國的九章算術中多數的內涵即與生活中的應用息息相關，日常生活中也有不少問題可透過數學加以解答。例如：如何規劃以500元暢遊屏東「海角七號」拍攝景點？學生要回答這個問題，必須藉由觀察、假設、收集資料、推算等方法才可做出結論。
3. 和語文的連結：要提昇數學資優生的能力，發展口頭和書寫溝通技巧是必要的。美國 NAEP (NAGB, 2002) 認為溝通(communication)是三種數學威力 (mathematical power) 之一，也就是學生應能使用數學語言表達他的數學概念，解釋答案後面的推理，甚至可以對數學概念進行反思性的寫作。
4. 與歷史的連結：角色楷模 (role models) 對資優學生的影響不容小覷，數學和科學名人的傳記可以提供資優學生做為典範，也培養學生的鑑賞能力。
5. 與地理、哲學、甚至天文的連結：同一時間，東、西方數學的發展如何？數學和哲學的關係、數學和天文學的相遇等……，都是相當好的科際整合素材。
6. 與藝術的連結：看似無關的藝術其實也與數學有連結，例如：幾何學對於建築的影響、方格組合、比例、對稱，對於繪畫的影響都值得加以探索。

Johnson (1994/2003) 認為數學資優生常有不尋常的預備能力以及強烈的探究意願，所以適性教育與挑戰性課程對資優生相當重要。我國 2008 年公布的資優教育白皮書（教育部，2008）中，明確指出我國目前在提供給資優學生適性課程的努力並不夠，在行動計畫中亦以給予資優生適切的課程，作為中長期目標。資優生有優於一般生的心智能力、其知識體系上也較為完善，如果能善用其認知能力，並連結到其他學科領域中，不僅可增加學習的複雜性，以滿足資優生對挑戰性學習的需求，亦可維持他們對數學學習的興趣。再由目前我們為國小資優學生提供的特教服務來看，2009 年修訂通過的特殊教育法，明訂國教階段的資優教育服務型態不採集中成班方式，而以資優資源班進行，也就是資賦優異學生以接受普通教育為主，部分時間再到資源班中接受充實性課程，以滿足資優學生的特殊需求。所以要在僅有的二至八節課的安排中，對所有學科進行教學並不可為，如果能將數學與其他學科領域進行連結，也有助於學生獲得更多元的學習。

三、資優數學課程的科際整合實例

以下乃介紹「沒有數字的數學：一筆畫」課程，本課程包含四個單元 (topic)，分別是：哥尼斯堡七橋問題、漢米頓路徑、與大師相遇：數學家 L. Euler，以及理性與感性的交會：數學與藝術。預計每一單元的教學時間為二至四節課，各子題的教學目標與節數分配詳如表一，以下乃針對設計構想與教學重點說明如下：

表一 各單元教學目標與科際整合連結之領域

單元名稱	節次分配	教學目標	連結
哥尼斯堡七橋問題	四	<ol style="list-style-type: none"> 1.能理解哥尼斯堡七橋問題，並排除與解題無關之情境元素。 2.能畫出簡化問題情境表徵的網路圖，進而將原來的問題轉化為易於操作之等價問題—「網路圖一筆畫」問題。 3.能由操作若干典型網路圖案例，析出「可一筆畫」之網路圖所共有的「奇點」要素。 4.能由操作若干典型網路圖案例，析出「可一筆畫」之網路圖所共有的「偶點」要素。 5.能應用判斷「任一網路圖可否一筆畫」的通用準則，解決哥尼斯堡七橋問題與其他網路圖相關問題，進而發展改善之道。 	<ol style="list-style-type: none"> 1.數學建模技巧的學習 2.觀察、歸納、推理與證明能力的培養
漢米頓路徑	四	<ol style="list-style-type: none"> 1.能理解「掃街車」問題和「送報員」問題，並排除與解題無關之情境元素。 2.能找出掃街車路線（尤拉路徑）和送報員路線（漢米頓路徑）。 3.能理解尤拉路徑和漢米頓路徑的異同之處。 4.能體會尤拉圖與漢米頓路徑不必然共存。 5.能找出掃街車的最佳路徑和送報員的最佳路徑。 6.能理解漢米頓路徑和漢米頓圈的異同。 7.能找出漢米頓路徑的一般化原則。 8.能應用漢米頓路徑解決生活情境問題（郵差送信）。 	<ol style="list-style-type: none"> 1.數學建模技巧的學習 2.推理、證明能力 3.問題解決 4.數學溝通 5.與生活應用作連結

與大師相遇：數學家 L. Euler	四	<ol style="list-style-type: none"> 1.能閱讀 L. Euler 的傳記。 2.能針對數學專門詞彙提出疑問，並預測文本之數學專門詞彙。 3.能理解並歸納文本中的重點和內涵。 4.能使用有效策略摘錄文本中的重點，並反思、議論文本中之內涵。 5.能使用適切閱讀策略來閱讀數學科普書籍。 6.能口頭發表個人的閱讀重點和心得。 	<ol style="list-style-type: none"> 1.與數學史的連結 2.楷模學習
數學與藝術 理性與感性的交會：	二	<ol style="list-style-type: none"> 1.能思考哪些行業需要數學。 2.能瞭解數學能力對職業的相關性。 3.能透過具體實例，瞭解跨領域知識的重要性。 4.能瞭解藝術家 Matiss 晚期創作品，及其中包含之數學（拓樸學、位相學）元素。 5.能由操作相關藝術素材，以團體創作方式將數學元素融入藝術作品。 	<ol style="list-style-type: none"> 1.與美術的連結 2.團體創作

（一）數學建模活動融入

本課程以尤拉的七橋問題做開端，協助學生將問題情境以網路圖進行表徵，再讓學生觀察許多圖形，並利用表列法進行歸納、推理、證明等高層次思考的技巧，從中探尋一筆畫的規律；繼之，透過掃街車與送報員問題，讓同學瞭解除了尤拉路徑之外，另有漢米頓路徑的提出，並用兩種習得的概念解決生活情境的問題。課程重點在於體會數學知識形成與應用的數學建模（Mathematical modeling）歷程。數學建模是把實際問題加以分析整理，提出數學模型在求解之後，再驗證模型是否合理；並應用該數學模型來解釋現實問題（Andrews & McLone, 1976）。不同於傳統的解題只將焦點放在問題的數學表徵化和數學解答，數學建模的焦點在於詮釋情境資訊、辨別潛在的問題、建立模式、再詮釋數學解答的前提、假設，與可能的偏誤（楊凱琳、林福來，2006）。在升學導向之下，學校數學教學多是依照下列步驟進行：介紹組織完整的單元概念、示範例題和演算技巧、讓學生練習、學生儘可能提供自己正確的想法、教師提供便捷的解題技巧（Lin & Tsao, 1998），強記公式、精熟演算、標準題型的訓練成為數學教學的重點，本例中融入數學建模的應用，希冀讓學生學習數學的思維方式並將數學知識與生活應用作連結。

（二）與生活應用的連結

一筆畫被視為是二十世紀拓樸學（Topology）的始祖，圖枝理論對現今資訊科學有重要影響。另外，數學對生活、職業世界也都有關連。本課程中協助學生運用一筆畫的策略進行日常生活的時間規劃；也引入麵包師傅伍寶春的故事，說明跨領域學習的重要性以及數學在麵包師傅職業的功能。而數學過程的分析性思考、歸納與推理能力是學習醫學、法律、新聞行業的重要預備能力。筆者希望此一連結可以協助學生認同學習數學的潛在價值，讓數學知識不與現實世界脫節。

（三）楷模學習與數學文化的連結

透過閱讀尤拉的故事希望為資優學生提供典範，在資優教育的理論裡，以特殊人物為典範做為效尤的目標，是相當重要的，因為角色學習在個人發展過程中，具有重要的心理作用，有適當的認同與學習對象，可以激發其成就動機，追求生涯發展。數學家尤拉不僅在數學有豐碩的成就，在物理學、天文學皆有相當貢獻，本身即是一科際整合的良好典範，課程中引介數學家尤拉的故事，能為資優學生提供見賢思齊的機會。另外，藉由閱讀數學文本，也指導學生如何摘述重點、臆測數學詞彙，以提升數學閱讀能力。

（四）與藝術的連結

一筆畫也對法國畫家馬蒂斯（Matisse）的畫作有所影響（朴景美，2004/2005），馬蒂斯學習過位相幾何數學，在其晚年為疾病所苦的時候，其畫作風格乃由精巧的人類樣貌，變得極為單純、抽象，此一作法與位相數學的概念相符，本課程藉由介紹馬蒂斯的畫作，協助學生欣賞藝術，也讓學生瞭解藝術與數學的關係，並透過動手做進行創意發想。

（五）引導思考，歷程重於結果

此一教材的重點不在於通透尤拉定理以求取考試的高分，各種作業單的給予與安排的目的都在激發學生的好奇心、進行數學思考與開展創造力，所以教師必須營造一個鼓勵學生思考與表達的支持性環境，讓學生可以自在的陳述想法、尊重與聆聽他人的意見，並協助學生解釋自己的答案、彼此進行探討與提問，老師不是判斷答案正確與否的仲裁者，也不是真理的來源，老師應該積極地啟迪學生的思維，以拓展數學視野、對數學建立正確態度為教學重點。

（六）提供加深的課程，作為滿足個別需求的區分性教學

對於部分在數學潛能特別優異且學習動機強的學生，課程也提供深度與複雜度更高的延伸學習教材，讓資優學生有機會去挑戰與學習較複雜的數學

問題，在一般的教室中對於能力好的學生往往給予更多的練習和測驗，但這並不能擴展學生的數學能力，只是讓學生精熟學習罷了，在本課程中，包含「騎士遊歷」以及「一筆畫定理一般化」兩個學習單元，提供學生深入探究的機會。

四、結語

Robinson 與 Aronica (2009/2009) 發現唯有讓天賦與熱情接軌，才有機會創造非凡的成就，而影響個人甚深的學校教育，有必要協助學生探索個人的天賦與能力，進而引燃他們對天賦展現的熱情，如果擁有天資但缺乏實踐的動機與熱情，將使個人逐漸喪失因應世界未來變革的能力。我國的數學教學在升學主義的影響之下，多數以演算、例行性問題的訓練與解題能力的培養為主軸，數學學習以「入學考試獲得高分為第一考量」，所以數學學習是為了進入理想學校的工具性目的，但若從九年一貫課程綱要中，所說明數學納入國民教育的基礎課程的原因來看：「數學被公認為是科學、技術與思想發展的基石，文明演進的指標與推手。數學結構之精美，不但體現在科學理論的內在結構中及各聞名之建築、工技與藝術作品上，自身亦呈現一種獨特的美感」，目前的教學現場並未能充分實現此一期待。全人發展的資優概念已是資優教育的共識，在本文中筆者介紹的數學課程即是著眼於此，透過科際整合的方式來設計資優數學課程，將數學與生活、職業、歷史、藝術進行外部連結，讓資優生認識與體會學科知識彼此的關連，也清楚數學學習的價值性，尤其在數學相關高層思考技巧應用中享受沈浸數學的樂趣。期盼藉此協助數學資優學生進入發現天賦之旅。

誌謝：

本文為行政院國家科學委員會補助研究的部分成果，補助編號為 NSC-99-2511-S-153-010--MY3，謹此致謝。

參考文獻

- 王海娟 (譯) (2005)。無所不在的數學現象—破解生活中的數字把戲。(原作者：朴景美)。臺北：晨星。(原著出版年：2004)
- 何定照 (2012 年 12 月 9 日)。數學皇帝丘成桐：盲求奧林匹亞是畸形。聯合

報，A3 版。

- 侯雅齡 (2010)。科學自我概念之大魚小池效應探究：資優生教育安置方式的思考。《教育科學研究期刊》，55 (3)，61-87。
- 特殊教育課程教材教法及評量方式實施辦法 (2010 年 12 月 31 日)。
- 翁秉仁與趙學信 (譯) (2012)。丘成桐談空間的內在形狀 (原作者：S. T. Yau, & S. Nadis)。臺北：遠流。(原著出版年：2012 年)
- 張秋男編 (2005)。國際數學與科學教育成就趨勢調查 2003。台北：國立臺灣師範大學科學教育中心。2009/12/4，取自：
<http://www.edu.tw/files/publication/B0013/95compulsory.xls>
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要-數學學習領域 (第二階段)。台北：教育部。
- 教育部 (2008)。國民中小學九年一貫課程綱要-數學學習領域 (第三階段)。台北：教育部。
- 教育部 (2008)。資優教育白皮書。台北：教育部。
- 葉偉文 (譯) (2005)。幹嘛學數學？ (原作者：S. K. Stein)。臺北：天下文化。(原著出版年：1996)
- 楊凱琳、林福來 (2006)。探討高中數學教學融入建模活動的支撐策略及促進參與教師反思的潛在機制。《科學教育學刊》，14 (4)，517-543
- 鍾靜 (2009)。問題導向學習與數學教師專業成長。臺北：國立臺北教育大學。
- 謝凱蒂 (譯) (2009)。讓天賦自由 (原作者：K. Robinson, & L. Aronica)。臺北：天下遠見。(原著出版年：2009)
- Andrews, J. G., & McLone, R. R. (1976). *Mathematical modeling*. London/Boston: Butterworths
- Brody, L. E., & Benbow, C. P. (1987). Accelerative strategies: How effective are they for the gifted? *Gifted Child Quarterly*, 31, 105-110.
- Clark, B. (2002). *Growing up gifted: Developing the potential of children at home and at school* (6th ed.). Upper Saddle River, NJ: Merrill/Prentice Hall.
- Davis, G. A., & Rimm, S. B. (1998). *Education of the gifted and talented* (4th ed.). Boston: Allyn and Bacon.
- Feldhusen, J. F. (1986). A conception of giftedness. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 112-127). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Feldhusen, J. F., Proctor, T. B., & Black, K. N. (1986). Guidelines for grade

advancement of precocious children. *Roeper Review*, 9, 25-27.

- Johnson, D. T. (1994). Mathematics curriculum for the gifted. In 呂金燮、李乙明 (譯) (2003)。資優課程 (289-323 頁)。台北：五南。
- Lin, F. L. & Tsao, L. C. (1998). Exam Maths re-examined. In C. Hoyles, C. Morgan & G. Woodhouse(Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum*(pp. 228-239). London: Routledge.
- Martin, M. O., Mullis, I. V. S., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international science report. Findings from IEA's trends in international Mathematics and Science study at the fourth and eight grades*. Chestnut Hill, MA: IEA TIMSS & PIRLS International Study Center.
- National Assessment Governing Board (2002). *Mathematics framework for the 2003 national assessment of educational progress*. Washington, D.C.: National Assessment Governing Board U.S. Department of Education.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Renzulli, J. S. (2005). Applying gifted education pedagogy to total talent development for all students. *Theory Into Practice*, 44(2), 80-89.
- Steiner, H.H. (2006). A microgenetic analysis of strategy development in gifted and averageability children. *Gifted Child Quarterly*, 50 (1), 62-74.
- Southern, W.T., Jones, E.D. & Fiscus, (1989). Practitioner objections to the academic acceleration of gifted children. *Gifted Child Quarterly*, 33(1), 29-35.